

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. 방정식 $27^{\frac{x}{3}} = 9^{x-1}$ 을 만족시키는 실수 x 의 값은? [2점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2. 등식 $8^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{2}$ 를 만족시키는 양수 a 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $f(0) = 13$ 인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(3) & (x < 2) \\ x^2 - x - 2 & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 $x = 2$ 에서 미분가능하다고 하자. 이때 $f(4)$ 의 값은? [3점]

- ① 25 ② 27 ③ 29 ④ 31 ⑤ 33

4. $0 \leq x < 2\pi$ 에서 방정식 $2\sin x = \cos^2 x + 1$ 의 서로 다른 해의 개수를 n 이라 할 때, n 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 모든 항이 양수인 등비수열 a_n 에 대하여

$$a_2 + a_5 = 90, a_3 + a_4 = 60$$

이고 $a_2 < a_3$ 일 때, a_1 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

6. 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} ax+2 & (x < 1) \\ x^2+bx & (x \geq 1) \end{cases}$$

를 만족시킨다. 또한

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(1+x) - f(1-x)}{x} = 9$$

일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수) [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

7. $0 \leq x < 2\pi$ 에서 방정식 $\sin x + \cos 2x = 0$ 의 해를 작은 것부터 α, β, γ 라 하자. 이때 $(1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(1 - \cos \gamma)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

8. 양의 정수 a 에 대하여 함수 $f(x) = (x-1)(x-a)$ 가

$$\int_0^3 |f(x)|dx = \int_0^3 f(x)dx + \frac{20}{3}$$

을 만족시킬 때, a 의 값은? [3점]

- ① 4 ② ③ ④ 7 ⑤ 8

9. 실수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = |x-a| + |x-b|$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1 < a < b < 4$

(나) $\int_0^1 f(x)dx = 5$

(다) $\int_0^4 f(x)dx = 11$

이때 $a^2 + b^2$ 의 값은? [3점]

- ① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

10. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$(1-x)f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a - \int_{-1}^x f(t)dt$$

를 만족시킨다. 또한 $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ 일 때, $2f(2)$ 의 값은? [3점]

- ① 25 ② 27 ③ 29 ④ 31 ⑤ 33

11. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$(x^2 - 3x + 2)f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

를 만족시킨다. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$ 일 때, $f(3)$ 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.) [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

12. 자연수 n 에 대하여 두 곡선 $y = \log_2(x - n)$,

$y = \log_4(80 - x)$ 가 만나는 점의 x 좌표를 m 이라 하자. m 은

자연수이고, $n < t < m$ 을 만족시키는 정수 t 의 개수가 4이다.

직선 $x = 70$ 과 두 곡선으로 둘러싸인 영역의 내부에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수이고 $x + y$ 가 짝수인 점의 개수는? [3점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

13. 수열 a_n 이 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = 2a_n + 2^{n-1}$$

을 만족시킨다. $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때, $S_n > 100000$ 을 만족시키는

가장 작은 n 의 값을 구하시오. [3점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 실수 t 에 대해 닫힌구간 $[t, t+2]$ 에서 함수 $f'(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$ 는 구간 $[-1, 1]$ 에서 $t=0$ 에서 최소이다.

(나) $\int_{-1}^1 g(t)dt = 42$

또한 $f(1) = 2$ 일 때, $f(3) - f(-1)$ 의 값은? [3점]

- ① 66 ② 68 ③ 70 ④ 72 ⑤ 74

15. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 집합 $A = \text{allim}_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{x-a}$ 의 값이 존재한다. 원소는 서로 다른 두 자연수이다.

(나) 집합 $B = \text{blim}_{x \rightarrow b} \frac{f(x-1)}{f(x+1)} = 1 = 4$

이때 $f(1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

- ① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

단답형

16. 삼차함수 $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 8$ 에 대하여 점 $P(1, a)$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 그을 수 있는 서로 다른 접선의 기울기를 m_1, m_2, m_3 라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 양의 정수 a 의 값의 합을 구하시오. [3점]

(가) 점 P 에서 곡선에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있다.

(나) $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 < 0$

17. 상수 $a > 1$ 에 대하여 두 곡선 $y = a^x, y = a^{-x}$ 가 직선 $x = 2$ 와 만나는 점을 각각 P, Q 라 하자. $\overline{PQ} = \sqrt{15}$ 일 때, $a^4 + a^{-4}$ 의 값을 구하시오. [3점]

18. 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 실수 k 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+3}{(x-1)f(x)+f(k)}$ 의 값이 존재하지 않도록 하는 서로 다른 실수 k 의 값은 p 와 q 뿐이다.
 (나) $f(1) = -3$

이때 $f(p)+f(q)$ 의 값을 구하시오. [3점]

19. 첫째항이 정수인 수열 a_n 이 모든 자연수 n 에 대하여

$a_{n+1} = (a_n - 5)^2$ 을 만족시킨다. $a_k = 121$ 인 4 이상의 자연수 k 가 존재한다. 이러한 k 의 최솟값이 짝수이도록 하는 모든 a_1 의 값의 합을 구하시오. [3점]

20. 수열 a_n 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $a_1 = 7$
 (나) 2 이상의 자연수 n 에 대하여
- $$\sum_{k=1}^n a_k = 2a_n + n^2 - n - 1$$

이때 a_{12} 의 값을 구하시오. [3점]

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + 3x + 2}{f(x) + x} = \frac{3}{2} \text{ 라 하자. } A = -2, 1 \text{ 이고}$$

$f(-1) = 1$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

22. 함수 $f(x) = -x^4 + 10x^2 - 9$ 에 대하여, 함수

$g(x) = |f(x) - k|$ 가 미분가능하지 않은 점의 개수가 정확히 4가 되도록 하는 모든 자연수 k 의 값의 합을 구하시오. [3점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

5지선다형

23. 구간 $[0,1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0,1)$ 에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $0 < x < 1$ 에서 $f'(x) = (x+a)e^{-f(x)}$
- (나) $f(0) = 0$
- (다) $\int_0^1 e^{f(x)} dx = \frac{19}{6}$

이때 a 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

24. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \int_1^x \ln t dt - a \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값을 갖는다.
- (나) 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 합은 $1-e^2$

이때 상수 a 의 값은? [3점]

- ① e^{-2} ② e^{-1} ③ 1 ④ e ⑤ e^2

25. $0 < t < \frac{4}{e^2}$ 인 실수 t 에 대하여, 방정식 $te^u = u^2$ 의 실근

중 $u \geq 2$ 인 근을 $u = M(t)$ 라 하자. $\lim_{t \rightarrow (\frac{4}{e^2})^-} \frac{(M(t)-2)^2}{4-e^2t}$ 의 값은?

[3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

26. 양의 정수 a, b 에 대하여 두 등비수열 a_n, b_n 을

$a_n = a \cdot 2^{n-1}, b_n = b \cdot 3^{n-1}$ 로 정의한다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{3^{n-1}} = 91, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^{n-1}} = 42$ 일 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 121 ② 125 ③ 129 ④ 133 ⑤ 137

27. $0 < t < \frac{1}{e}$ 인 실수 t 에 대하여 방정식 $te^x = x$ 의 두 양의 실근을 $\alpha(t), \beta(t)$ 라 하자. $\lim_{t \rightarrow (\frac{1}{e})^-} \frac{(\beta(t) - \alpha(t))^2}{8(1-et)}$ 의 값은?(단, $\alpha(t) < 1 < \beta(t)$) [3점]
- ① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

28. 양의 정수 a, b 에 대하여 두 등비수열 a_n, b_n 을 $a_n = \frac{a}{2^{n-1}}, b_n = \frac{b}{3^{n-1}}$ 로 정의한다. 다음 조건을 모두 만족시킬 때,

<p>(가) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 5$</p> <p>(나) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 900$</p>

- $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]
- ① 55 ② 60 ③ 65 ④ 70 ⑤ 75

단답형

29. 첫째항과 공비가 모두 0이 아닌 두 등비수열 a_n, b_n 에 대하여 두 급수가 각각 수렴하고

$$(가) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_{2n-1}}{3} \right|$$

$$(나) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

$$(다) \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 3$$

$$(라) \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{47}{10}$$

이때 a_1 의 값을 구하시오. [3점]

30. 매개변수 t 로 나타낸 곡선 $C: x=t^3+6e^t, y=t^3-6e^t$ (t 는 실수)에 대하여, 자연수 a 에 대해 점 $A(a, -a)$ 를 지나는 곡선 C 의 접선들의 접점을 모두 구할 때, 그 개수가 정확히 2가 되도록 하는 a 의 값을 구하시오. [3점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

5지선다형

23. 수직선의 원점에 점 P 가 있다. 한 개의 동전을 한 번 던져 앞면이 나오면 점 P 를 양의 방향으로 1만큼, 뒷면이 나오면 점 P 를 음의 방향으로 2만큼 이동시키는 시행을 한다. 이 시행을 12번 반복할 때, 매 시행 후 점 P 의 좌표가 음수가 되지 않는 시행의 횟수가 정확히 6일 확률을 p 라 하자. $256p$ 의 값은? [3점]

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

24. 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7개의 공을 원 모양의 탁자 위에 원형으로 배열한다. 회전하여 일치하는 배열은 같은 배열로 본다. 1이 적힌 공과 2가 적힌 공은 서로 이웃하고, 3이 적힌 공과 4가 적힌 공은 서로 이웃하지 않도록 배열하는 경우의 수는? [3점]

- ① 140 ② 144 ③ 148 ④ 152 ⑤ 156

25. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 $f(1) + f(2) = 4$ 를 만족시키는 모든 함수 $f: A \rightarrow A$ 중에서 임의로 하나를 택하는 시행을 생각한다. 이 시행에서 $f(3) = f(4)$ 인 사건을 B 라 하자. 이 시행을 서로 독립적으로 n 번 반복할 때 사건 B 가 일어나는 횟수를 확률변수 X 라 하자. $P(X=1) = P(X=2)$ 일 때, $f(1) + f(2) = 4$ 를 만족시키는 함수의 개수와 n 의 합은? (단, $n \geq 2$ 이다.) [3점]

- ① 45 ② 50 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

26. 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낸다. 꺼낸 4개의 공이 흰 공 2개와 검은 공 2개로 이루어져 있고 적힌 네 수의 합이 짝수일 때, 같은 숫자가 적힌 흰 공과 검은 공을 적어도 한 쌍 포함할 확률은? [3점]

- ① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

27. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 공을 원 모양의 탁자 위에 원형으로 배열한다. 회전하여 일치하는 배열은 같은 배열로 본다. 1이 적힌 공과 2가 적힌 공이 서로 마주보고, 3이 적힌 공과 4가 적힌 공은 서로 이웃하지 않도록 배열하는 경우의 수는? [3점]

- ① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

28. 이항분포 $B(n, p)$ 를 따르는 확률변수 X 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $P(X=0) = P(X=2)$
 (나) $E(X) : V(X) = 7 : 6$

$7E(X) + 49V(X)$ 의 값은? (단, n 은 자연수이고

$0 < p < \frac{1}{2}$ 이다.) [3점]

- ① 57 ② 60 ③ 63 ④ 66 ⑤ 69

단답형

29. 자연수 $m(m \geq 4)$ 과 자연수 n 에 대하여 1부터 m 까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 m 장의 카드를 한 주머니에 넣는다. 이 주머니에서 임의로 3장의 카드를 동시에 꺼내어 카드에 적혀 있는 세 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 세 수 중 한 수가 나머지 두 수의 합과 같은 사건을 A 라 하자. 이 시행을 서로 독립적으로 n 번 반복할 때 사건 A 가 일어나는 횟수를 확률변수 X 라 하자.

$$P(X=1) = P(X=2), E(X) : V(X) = 6 : 5$$

일 때, $m+n$ 의 값을 구하시오. [3점]

30. 숫자 1, 2, 4, 8이 적힌 카드가 각각 충분히 많이 있다. 이 카드 중 6장을 택하여 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수 중 다음 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구하시오. [3점]

- (가) 각 자리의 수의 곱은 64이다.
 (나) 같은 수가 이웃하여 나타나지 않는다.
 (다) 홀수 번째 자리에 놓인 세 수의 곱과 짝수 번째 자리에 놓인 세 수의 곱이 서로 같다.

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.