

2027학년도 LEVEL-F 모의고사 1회

정답 및 해설

수학 영역

정답 확인과 풀이 검토를 위한 해설집입니다.

※ 문제 풀이 후 해설을 확인하세요.

01 정답 ② 2

핵심 지수가 유리수일 때의 지수법칙

정답풀이 :

밑을 3으로 통일한다.
 $27 = 3^3, 9 = 3^2$ 이므로

$$27^{\frac{x}{3}} = 3^x, \\ 9^{x-1} = 3^{2x-2}.$$

따라서 $3^x = 3^{2x-2}$ 이고, 밑 3은 $3 > 0, 3 \neq 1$ 이므로 지수가 같아야 한다.

$$x = 2x - 2 \Rightarrow x = 2.$$

02 정답 ④ 4

핵심 지수가 유리수일 때의 지수법칙

정답풀이 :

$8 = 2^3$ 이므로

$$8^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$$

따라서 좌변 = $4 \cdot 2^{1/2} = 4\sqrt{2} \sqrt{2} \neq 0$ 이므로 $a = 4$

03 정답 ① 25

핵심 함수의 연속과 미분가능성

정답풀이 :

이차함수를 $f(x) = ax^2 + bx + 13$ 이라 두자.
 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \{f(x) - f(3)\} \\ = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - x - 2) = 0$$

에서 $f(2) = f(3)$

따라서

$$4a + 2b + 13 = 9a + 3b + 13 \Rightarrow 5a + b = 0 \quad (1)$$

또한 미분가능해야 하므로 좌미분계수와 우미분계수가 같다.
 우미분계수는

$$(x^2 - x - 2)'|_{x=2} = 3$$

이고, 좌미분계수는 $f'(2) = 4a + b$ 이므로

$$4a + b = 3 \quad (2)$$

(1), (2)를 연립하면 $a = -3, b = 15$

따라서

$$f(x) = -3x^2 + 15x + 13, \quad f(4) = -48 + 60 + 13 = 25$$

04 정답 ② 2

핵심 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식

정답풀이 :

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 이므로 식은 $\sin^2 x + 2\sin x - 2 = 0$ 근의 공식으로 $\sin x = -1 \pm \sqrt{3}$ 이 중 $-1 - \sqrt{3} < -1$ 이므로 각각, $-1 + \sqrt{3} \in (0, 1)$ $\sin x = c$ ($0 < c < 1$)는 $[0, 2\pi]$ 에서 정확히 두 해를 갖는다.

따라서 $n = 2$

05 정답 ③ 5

핵심 등비수열의 일반항

정답풀이 :

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면 모든 항이 양수이므로 $a > 0, r > 0$ 조건에서

$$ar(1 + r^3) = 90, \quad ar^2(1 + r) = 60$$

이므로 두 식을 나누면

$$\frac{1 + r^3}{r(1 + r)} = \frac{3}{2}.$$

$1 + r^3 = (1 + r)(1 - r + r^2)$ 이므로

$$\frac{1 - r + r^2}{r} = \frac{3}{2} \\ \Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0$$

따라서 $r = 2$ 또는 $r = \frac{1}{2}$ $a_2 < a_3$ 이고 $a_3/a_2 = r$ 이므로 $r > 1$. 즉 $r = 2$

이때

$$ar(1 + r^3) = a \cdot 2 \cdot 9 = 18a = 90$$

이므로 $a = 5$

따라서 $a_1 = 5$

06 정답 ⑤ 7

핵심 함수의 극한값 계산

정답풀이 :

$x \rightarrow 0^-$ 이면 $x < 0$ 이므로 $1 + x < 1, 1 - x > 1$ 따라서

$$f(1 + x) = a(1 + x) + 2, \\ f(1 - x) = (1 - x)^2 + b(1 - x)$$

분자를 전개하면

$$\{a(1 + x) + 2\} - \{(1 - x)^2 + b(1 - x)\} = (a - b + 1) -$$

주어진 극한이 존재하려면 $x \rightarrow 0$ 에서 상수항이 0이어야 하므로

$$a - b + 1 = 0, \quad \text{즉 } b = a + 1.$$

이때 분자를 x 로 나눈 식의 극한은 $a + b + 2$ 이므로

$$a + b + 2 = 9 \Rightarrow a + b = 7$$

07 정답 ㉔ $\frac{1}{4}$

핵심 삼각함수를 포함한 방정식과 부등식

정답풀이:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \text{ 이므로 } 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

$$\text{즉 } (2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = 1 \text{ 또는}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$[0, 2\pi]$ 에서 해는

$$\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

각 코사인 값은

$$0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$$

곱은

$$1 \cdot (1 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{4}$$

08 정답 ㉔ 4

핵심 정적분의 계산과 활용

정답풀이:

$$\int_0^3 |f(x)| dx - \int_0^3 f(x) dx = 2 \cdot (\text{음수 부분 넓이})$$

이므로 조건은 음수 부분 넓이

$$N = \frac{10}{3}$$

$f(x) = (x-1)(x-a)$ 는 $x=1$ 과 $x=a$ 에서 영이고, $a \geq 2$ 이면 $[1, \min(a, 3)]$ 이 음수 영역이다.

• $a=1$: $f \geq 0$ 이므로 $N=0$ 불일치.

• $a=2$:

$$N = -\int_1^2 (x-1)(x-2) dx = \frac{1}{6}$$

불일치.

• $a \geq 3$: 음수 영역이 $[1, 3]$ 이고

$$\int_1^3 (x-1)(x-a) dx = \frac{14}{3} - 2a$$

이므로

$$N = 2a - \frac{14}{3} = \frac{10}{3}$$

에서 $a=4$

따라서 $a=4$

09 정답 ㉔ 19

핵심 정적분의 계산과 활용

정답풀이:

$0 \leq x \leq 1 < a < b$ 이므로 $|x-a| = a-x, |x-b| = b-x$, 따라서

$$f(x) = a + b - 2x.$$

조건 (나)에 의해

$$\int_0^1 f(x) dx = a + b - 1 = 5 \tag{1}$$

$$\Rightarrow a + b = 6$$

또한 $1 < a < b < 4$ 이므로

$$\int_0^4 |x-a| dx = \frac{a^2}{2} + \frac{(4-a)^2}{2} = a^2 - 4a + 8,$$

같은 방식으로

$$\int_0^4 |x-b| dx = b^2 - 4b + 8$$

따라서

$$\int_0^4 f(x) dx = a^2 + b^2 - 4(a+b) + 16.$$

(1)을 대입하면

$$\int_0^4 f(x) dx = a^2 + b^2 - 8$$

이고, 조건 (다)에 의해

$$a^2 + b^2 - 8 = 11 \Rightarrow a^2 + b^2 = 19.$$

(이때 $ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}{2} = \frac{17}{2}$ 이고 $a, b = 3 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 로

$1 < a < b < 4$ 를 만족한다.)

10 정답 ㉔ 25

핵심 정적분의 계산과 활용

정답풀이:

양변을 x 로 미분:

$$-f(x) + (1-x)f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 - f(x),$$

즉 $(1-x)f'(x) = 3(x-1)(x-3) \neq 1$ 에서

$f'(x) = -3(x-3) = -3x+9$ 다항함수이므로 전역에서 성립,

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 9x + C$$

원식에 $x=1$ 대입:

$$0 = 1 - 6 + 9 + a - \int_{-1}^1 f = 4 + a - 0$$

에서 $a = -4$

$$\int_{-1}^1 f dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 9x + C\right) dx$$

$$= -1 + 0 + 2C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = -6 + 18 + \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$$

$\therefore 2f(2) = 25$

11 정답 ③ 6

핵심 함수의 극한값 계산

정답풀이 :

좌변의 계수 다항식 $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ 가 $x = 1, x = 2$ 에서 영이므로, 좌변은 $x = 1, x = 2$ 에서 모두 0 따라서 우변의 삼차식도 $x = 1, x = 2$ 를 근으로 가져야 한다. 또한 우변의 최고차항이 x^3 이므로 $f(x)$ 는 최고차항이 1인 일차함수이다.

어떤 상수 d 에 대하여 $f(x) = x + d$ 로 두면

$$(x - 1)(x - 2)(x + d) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

조건

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$$

에서 $1 + d = 4$ 이므로 $d = 3$

따라서 $f(x) = x + 3$ 이고

$$f(3) = 6$$

12 정답 ⑨ 9

핵심 지수함수와 로그함수의 그래프

정답풀이 :

교점의 x 좌표가 m 이므로

$$\log_2(m - n) = \log_4(80 - m)$$

$$= \frac{1}{2} \log_2(80 - m)$$

따라서

$$(m - n)^2 = 80 - m. \tag{1}$$

정수 t 중 $n < t < m$ 인 것의 개수가 4이므로 $m - n - 1 = 4$,

즉 $m - n = 5$

이를 (1)에 대입하면

$$25 = 80 - m \Rightarrow m = 55, \quad n = 50$$

두 곡선과 직선 $x = 70$ 으로 둘러싸인 영역의 내부는

$$55 < x < 70, \quad \log_4(80 - x) < y < \log_2(x - 50)$$

이다. 정수 $x = 56, 57, \dots, 69$ 에 대해 가능한 자연수 y 를 세면 다음과 같다.

x	가능한 y	$x + y$ 가 짝수인 개수
59, 60, 61, 62, 63, 64	3	3
65, 66	2, 3	2
67, 68, 69	2, 3, 4	4

따라서 조건을 만족하는 점의 개수는

$$3 + 2 + 4 = 9$$

13 정답 ④ 14

핵심 수열의 귀납적 정의

정답풀이 :

양변을 2^n 으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{2^n} = \frac{a_n}{2^{n-1}} + \frac{1}{2}$$

$$b_n = \frac{a_n}{2^{n-1}}$$

로 두면 $b_1 = 1$.

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}$$

이므로

$$b_n = \frac{n + 1}{2}$$

따라서

$$a_n = (n + 1) \cdot 2^{n-2}.$$

S_n 을 순차 계산하면 $S_{12} = 24576, S_{13} = 53248, S_{14} = 114688$

이므로 $S_{13} < 100000 < S_{14}$

따라서 가장 작은 $n = 14$

14 정답 ④ 72

핵심 정적분의 계산과 활용

정답풀이 :

f 의 최고차항 계수가 1이므로 $f'(x) = 3x^2 + \dots$ 인 위로 열린 이차함수.

$f'(x) = 3(x - k)^2 + a$ 라 두자. 닫힌구간 $[t, t + 2]$ 에서 위로 열린 이차함수의 최댓값은 꼭짓점에서 더 먼 끝점에서 일어난다.

분기점은 $|t - k| = |t + 2 - k|$ 에서 $t = k - 1$ (가)에서 최소가 $t = 0$ 이므로 $k - 1 = 0, k = 1$

따라서

$$g(t) = \begin{cases} 3(t-1)^2 + a & (-1 \leq t \leq 0) \\ 3(t+1)^2 + a & (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

$$\int_{-1}^0 3(t-1)^2 dt = 7$$

$$\int_0^1 3(t+1)^2 dt = 7$$

이므로

$$\int_{-1}^1 g dt = 14 + 2a = 42$$

, $a = 14$

$$f'(x) = 3(x-1)^2 + 14, f(x) = (x-1)^3 + 14x + C$$

$$f(1) = 14 + C = 2 \text{에서 } C = -12$$

$$f(3) - f(-1) = \int_{-1}^3 f'(x) dx$$

$$= \int_{-2}^2 (3u^2 + 14) du = 16 + 56 = 72$$

15 정답 ⑤ 64

핵심 함수의 극한값 계산

정답풀이 :

(가) $f(a) \neq 0$ 이면 극한은 $\pm\infty$ a 가 f 의 단순영점이면 $|f(x)|/(x-a)$ 의 좌우극한 부호가 달라 극한 미존재.
따라서 a 는 f 의 중복도 ≥ 2 인 영점.

사차함수, 최고차계수 1, 서로 다른 두 자연수 영점 \rightarrow
 $f(x) = (x-m)^2(x-n)^2$ (m, n 은 서로 다른 자연수)

(나) $f(b+1) \neq 0$ 이면 극한은 $f(b-1)/f(b+1) = 1$ 의 조건은 $[(b-1-m)(b-1-n)]^2 = [(b+1-m)(b+1-n)]^2$ 차-합을 이용하면

$$(p+q)(pq+1) = 0 \quad (p = b-m, q = b-n)$$

에 따라

$$b = \frac{m+n}{2}$$

또는 $(b-m)(b-n) = -1$

$B = \{4\}$ 가 되려면 첫째 경우

$$\frac{m+n}{2} = 4$$

(즉 $m+n=8$), 둘째 경우의 이차방정식

$$b^2 - 8b + (mn+1) = 0$$

이 중근 $b=4$ 를 가져야 한다.

$$\text{판별식 } (m-n)^2 - 4 = 0 \text{에서 } |m-n| = 2$$

따라서 $\{m, n\} = \{3, 5\}$

$(f(b+1) = 0$ 이 되는 $b \in \{2, 4\}$ 는 별도 검사: $b=4$ 는

$$(x-6)^2/(x-2)^2 \rightarrow 1 \text{로 OK.}$$

$b=2$ 는 $f(1)/f(3) = 64/0$ 로 미존재.)

따라서 $f(x) = (x-3)^2(x-5)^2, f(1) = 4 \cdot 16 = 64$

16 정답 30

핵심 도함수의 활용

정답풀이 :

접점의 x 좌표를 t 라 하자.

접선이 점 $(1, a)$ 를 지나려면

$$a = f(t) + f'(t)(1-t)$$

$$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 8, f'(x) = -3x^2 - 6x \text{이므로}$$

$$a = 2t^3 - 6t + 8.$$

$$g(t) = 2t^3 - 6t + 8 \text{이라 두면 } g'(t) = 6(t^2 - 1) \text{이고,}$$

$$g(-1) = 12, \quad g(1) = 4.$$

따라서 서로 다른 세 접선이 존재하려면

$$4 < a < 12$$

이어야 하므로, 양의 정수 a 는 **5, 6, 7, 8, 9, 10, 11**

세 접점의 x 좌표를 t_1, t_2, t_3 라 하면 이들은

$$2t^3 - 6t + 8 - a = 0$$

의 세 근이다.

즉

$$t^3 - 3t + \frac{8-a}{2} = 0$$

의 세 근이므로

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0, \quad \sum t_i t_j = -3, \quad t_1 t_2 t_3 = \frac{a-8}{2}.$$

기울기는 $m_i = f'(t_i) = -3t_i(t_i+2)$ 이므로

$$m_1 m_2 m_3 = (-3)^3 t_1 t_2 t_3 (t_1+2)(t_2+2)(t_3+2)$$

또한

$$(t_1+2)(t_2+2)(t_3+2)$$

$$= t_1 t_2 t_3 + 2 \sum t_i t_j + 4 \sum t_i + 8$$

$$= \frac{a-4}{2}.$$

따라서

$$m_1 m_2 m_3 = -27 \cdot \frac{(a-8)(a-4)}{4}.$$

조건 $m_1 m_2 m_3 < 0$ 은 $(a-8)(a-4) > 0$ 과 같고, $4 < a < 12$ 와 함께 고려하면

$$a = 9, 10, 11.$$

따라서 구하는 합은

$$9 + 10 + 11 = 30$$

17 정답 17

핵심 지수함수와 로그함수의 그래프

정답풀이 :

두 점은 각각

$$P(2, a^2), \quad Q(2, a^{-2})$$

이다. $a > 1$ 이므로 $a^2 > a^{-2}$ 이고,

$$\overline{PQ} = a^2 - a^{-2} = \sqrt{15}.$$

양변을 제곱하면

$$(a^2 - a^{-2})^2 = a^4 - 2 + a^{-4} = 15.$$

따라서

$$a^4 + a^{-4} = 17$$

18 정답 6

핵심 함수의 극한값 계산

정답풀이 :

$h(x) = f(x) + 3$ 이라 두면 $f(1) = -3$ 이므로 $h(1) = 0$

따라서 어떤 이차다항식 $P(x)$ 에 대하여

$$h(x) = (x - 1)P(x)$$

주어진 식은 $x \neq 1$ 에서

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) + 3}{(x - 1)\{f(x) + f(k)\}} \\ &= \frac{(x - 1)P(x)}{(x - 1)\{(x - 1)P(x) + f(k) - 3\}} \\ &= \frac{P(x)}{(x - 1)P(x) + f(k) - 3} \end{aligned}$$

이다.

- $f(k) \neq 3$ 이면 $x \rightarrow 1$ 일 때 분모가 $f(k) - 3 \neq 0$ 으로

수렴하므로 극한값이 존재한다.

- $f(k) = 3$ 이면 위 식은

$$\frac{P(x)}{(x - 1)P(x)} = \frac{1}{x - 1}$$

($P(x) \neq 0$ 근방에서)이 되어 $x \rightarrow 1$ 에서 유한한 극한값이

존재하지 않는다.

따라서 극한값이 존재하지 않게 하는 k 는 정확히 방정식 $f(k) = 3$

의 서로 다른 실근이다.

그 값들이 p, q 이므로

$$f(p) = 3, \quad f(q) = 3.$$

따라서

$$f(p) + f(q) = 6$$

19 정답 20

핵심 수열의 귀납적 정의

정답풀이 :

$a_k = 121$ 이라면

$$a_{k-1} - 5 = \pm 11$$

이므로 $a_{k-1} = 16$ 또는 -6 그런데 $k \geq 4$ 이면 $k - 1 \geq 3$ 이고,

a_{k-1} 은 제곱꼴로 얻어진 항이므로 음수가 될 수 없다.

따라서 $a_{k-1} = 16$

역으로 가능한 값을 추적하면

$$121 \leftarrow 16 \leftarrow \{1, 9\} \leftarrow \{4, 6, 2, 8\} \leftarrow \{3, 7\}$$

이고, 그 이전에는 정수인 이전 항이 더 이상 나오지 않는다.

최소의 k 가 짝수이고 $k \geq 4$ 이라면 가능한 경우는 $k = 4$ 이때

$$a_3 = 16, \quad a_2 \in \{1, 9\}.$$

$a_2 = 1$ 이면 $a_1 = 4, 6$ 이고, $a_2 = 9$ 이면 $a_1 = 2, 8$ 네 경우 모두

$a_4 = 121$ 이고 그보다 앞에서는 121이 나오지 않는다.

따라서 가능한 a_1 은

$$2, 4, 6, 8$$

이고, 합은

$$2 + 4 + 6 + 8 = 20$$

20 정답 26

핵심 수열의 귀납적 정의

정답풀이 :

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

라 두면 $n \geq 2$ 에서

$$S_n = 2a_n + n^2 - n - 1$$

이다. $n = 2$ 를 대입하면

$$7 + a_2 = 2a_2 + 4 - 2 - 1 = 2a_2 + 1$$

이므로 $a_2 = 6$

$n \geq 3$ 에서 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로

$$a_n = 2a_n + n^2 - n - 1 - \{2a_{n-1} + (n-1)^2 - (n-1)\}.$$

정리하면

$$a_n = 2a_{n-1} - 2n + 2.$$

$a_2 = 6$ 이고, 이 점화식에서 $a_n = 2n + 2$ 가 $n \geq 2$ 에 대해

성립함을 확인할 수 있다.

따라서

$$a_{12} = 2 \cdot 12 + 2 = 26$$

21 정답 22

핵심 함수의 극한의 활용

정답풀이 :

$g(x) = f(x) - 3x - 4$ 라 두면 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

또한

$$\begin{aligned} f(x) + 3x + 2 &= g(x) + 6(x + 1), \\ f(x) + x &= g(x) + 4(x + 1) \end{aligned}$$

먼저 $-2, 1 \in A$ 이 두 값에서 만약 $f(a) + a = 0$ 이면 분자는

$$f(a) + 3a + 2 = 2a + 2$$

가 되어 $a = -2, 1$ 각각에서 0이 아니므로 극한값이 유한하게 존재할 수 없다.

따라서 $a = -2, 1$ 에서는 분모의 극한값이 0이 아니고,

$$\frac{f(a) + 3a + 2}{f(a) + a} = \frac{3}{2}$$

가 성립한다.

이를 정리하면

$$g(a) = f(a) - 3a - 4 = 0$$

이므로

$$g(-2) = 0, \quad g(1) = 0$$

또한 $f(-1) = 1$ 이므로

$$g(-1) = f(-1) + 3 - 4 = 0$$

따라서

$$g(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)$$

이때 $x = -1$ 에서는

$$\begin{aligned} \frac{f(x) + 3x + 2}{f(x) + x} &= \frac{g(x) + 6(x + 1)}{g(x) + 4(x + 1)} \\ &= \frac{(x + 1)\{(x + 2)(x - 1) + 6\}}{(x + 1)\{(x + 2)(x - 1) + 4\}} \end{aligned}$$

이므로 극한값은

$$\frac{(-2) + 6}{(-2) + 4} = 2 \neq \frac{3}{2}$$

따라서 $-1 \notin A$ 이고, $A = \{-2, 1\}$ 과 모순이 없다.

이제

$$f(x) = g(x) + 3x + 4$$

이므로

$$f(2) = (4)(3)(1) + 6 + 4 = 22$$

22 정답 120

핵심 도함수의 활용

정답풀이 :

$f'(x) = -4x^3 + 20x = -4x(x^2 - 5)$ 이므로 f 의 임계점은 $x = 0, \pm\sqrt{5}$ 이고

$$f(0) = -9, \quad f(\pm\sqrt{5}) = 16$$

이다.

f 는 우함수이고 $f \rightarrow -\infty (x \rightarrow \pm\infty)$ 이므로 $x = 0$ 에서 극소(-9), $x = \pm\sqrt{5}$ 에서 극대(16)이다.

$g(x) = |f(x) - k|$ 가 $x = c$ 에서 미분 불가능할 필요충분조건은 c 가 방정식 $f(x) = k$ 의 단순근(즉 $f(c) = k$ 이고 $f'(c) \neq 0$)인 것이다.

임계점에서 일어나는 중복근에서는 $|f(x) - k|$ 가 $(x - c)^2$ 인자를 가지므로 g 가 미분가능하다.

f 의 그래프 개형에 따라 $f(x) = k$ 의 서로 다른 실근 개수와 단순근 개수는 다음과 같다.

k	실근 개형	단순
$k > 16$	없음	
$k = 16$	$x = \pm\sqrt{5}$ 중복근	
$-9 < k < 16$	서로 다른 단순근 4개	
$k = -9$	$x = 0$ 중복근, $x = \pm\sqrt{10}$ 단순근	
$k < -9$	단순근 2개	

따라서 단순근 개수가 정확히 4인 것은 $-9 < k < 16$ 일 때이며,

이를 만족하는 자연수 k 는 $1, 2, \dots, 15$ 합은

$$1 + 2 + \dots + 15 = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120$$

23 정답 ④

핵심 여러 가지 적분법

정답풀이 :

$F(x) = e^{f(x)}$ 라 두면 $0 < x < 1$ 에서

$$F'(x) = e^{f(x)} f'(x) = x + a.$$

따라서 $0 \leq x \leq 1$ 에서

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + ax + C$$

이고, $f(0) = 0$ 이므로 $F(0) = 1$

따라서 $C = 1$ 이고

$$e^{f(x)} = \frac{x^2}{2} + ax + 1$$

조건 (다)에 의해

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{f(x)} dx &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + ax + 1 \right) dx \\ &= \frac{1}{6} + \frac{a}{2} + 1 = \frac{7}{6} + \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

이 값이 $\frac{19}{6}$ 이므로

$$\frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

24 정답 ③ e^2

핵심 여러 가지 적분법

정답풀이 :

미분하면

$$f'(x) = \ln x - a \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln x}{x} (x - a)$$

$x = 1$ 에서 극댓값을 가지려면 $a > 1$ 이어야 한다.

이때 $x = a$ 에서 극솟값을 가진다.

$f(1) = 0$ 이고,

$$f(a) = \int_1^a \ln t dt - a \int_1^a \frac{\ln t}{t} dt.$$

따라서

$$f(a) = a \ln a - a + 1 - \frac{a(\ln a)^2}{2}.$$

$u = \ln a$ 라 두면 $u > 0$, $a = e^u$ 이고 조건 (나)는

$$e^u u - e^u + 1 - \frac{e^u u^2}{2} = 1 - e^2.$$

정리하면

$$e^u \{(u-1)^2 + 1\} = 2e^2. \tag{1}$$

함수

$$H(u) = e^u \{(u-1)^2 + 1\}$$

에 대하여

$$H'(u) = e^u u^2 > 0 \quad (u > 0)$$

이므로 (1)의 양의 해는 하나뿐이다. $u = 2$ 를 대입하면

$$e^2 \{1^2 + 1\} = 2e^2$$

이므로 $u = 2$

따라서

$$a = e^2.$$

25 정답 ③ 1

핵심 여러 가지 미분법

정답풀이 :

$u = M(t)$ 이면 $te^u = u^2$ 에서 $t = u^2 e^{-u}$ 이다. $t \rightarrow (4/e^2)^-$ 일

때 $u \rightarrow 2^+$ 이므로 $h = M(t) - 2$ 라 두면 $h \rightarrow 0^+$ 이고

$M(t) = 2 + h$ 이다.

이때 $e^2 t = (2 + h)^2 e^{-h}$ 이므로 구하는 극한은

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{4 - (2 + h)^2 e^{-h}}$$

이다. 분모와 분자에 e^h 를 곱하면

$$\frac{h^2}{4 - (2 + h)^2 e^{-h}} = \frac{h^2 e^h}{4e^h - (2 + h)^2}$$

이다.

이제

$$\begin{aligned} 4e^h - (2 + h)^2 &= 4e^h - (4 + 4h + h^2) \\ &= 4(e^h - 1 - h) - h^2 \end{aligned}$$

이다.

한편

$$e^h - 1 - h = \int_0^h (e^x - 1) dx$$

이고,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h - 1 - h}{h^2} = \frac{1}{2}$$

이다.

따라서

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{4e^h - (2+h)^2}{h^2} = 4 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 1$$

이고, $e^h \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 e^h}{4e^h - (2+h)^2} = 1$$

이다.

그러므로 구하는 값은 1

26 정답 ④ 133

핵심 등비급수의 수렴과 활용

정답풀이 :

두 번째 조건에서

$$\frac{a_n}{2^{n-1}} = a$$

이므로 $a = 42$ 첫 번째 조건은

$$\frac{a_n + b_n}{3^{n-1}} = a \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + b$$

이고, $n \rightarrow \infty$ 이면 $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \rightarrow 0$

따라서 극한값은 b 이고

$$b = 91.$$

그러므로

$$a + b = 42 + 91 = 133$$

27 정답 ③ 1

핵심 여러 가지 미분법

정답풀이 :

방정식 $te^x = x$ 는 $t = xe^{-x}$ 와 같다.

함수 $f(x) = xe^{-x}$ 는 $x = 1$ 에서 최댓값 $\frac{1}{e}$ 를 가지므로, $t \rightarrow (1/e)^-$ 일 때 두 근 $\alpha(t), \beta(t)$ 는 모두 1에 가까워진다.

$$\alpha(t) = 1 - a, \quad \beta(t) = 1 + b$$

라 두면 $a > 0, b > 0$ 이고 $a \rightarrow 0, b \rightarrow 0$ 이다.

이때

$$\begin{aligned} et &= e\alpha e^{-\alpha} = (1-a)e^a, \\ et &= e\beta e^{-\beta} = (1+b)e^{-b} \end{aligned}$$

이다.

먼저 b 를 이용하면

$$1 - et = 1 - (1+b)e^{-b} = \frac{e^b - 1 - b}{e^b}$$

이다. 그런데

$$e^b - 1 - b = \int_0^b (e^x - 1) dx$$

이고,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

이므로

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{e^b - 1 - b}{b^2} = \frac{1}{2}$$

이다.

따라서

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{1 - et}{b^2} = \frac{1}{2}$$

이다.

같은 방법으로 a 에 대해서도

$$1 - et = 1 - (1-a)e^a$$

이고,

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1 - et}{a^2} = \frac{1}{2}$$

이다.

따라서

$$\lim_{t \rightarrow (1/e)^-} \frac{a^2}{b^2} = 1$$

이므로

$$\lim_{t \rightarrow (1/e)^-} \frac{a}{b} = 1$$

이다.

이제

$$\beta(t) - \alpha(t) = (1+b) - (1-a) = a+b$$

이므로

$$\begin{aligned} &\frac{(\beta(t) - \alpha(t))^2}{8(1-et)} \\ &= \frac{(a+b)^2}{8(1-et)} \\ &= \frac{\left(\frac{a}{b} + 1\right)^2 b^2}{8(1-et)}. \end{aligned}$$

여기서

$$\frac{a}{b} \rightarrow 1$$

,

$$\frac{1 - et}{b^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

이므로

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow (1/e)^-} \frac{(\beta(t) - \alpha(t))^2}{8(1-et)} \\ &= \frac{(1+1)^2}{8 \cdot \frac{1}{2}} = 1. \end{aligned}$$

따라서 구하는 값은 1이다.

28 정답 ① 55

핵심 등비급수의 수렴과 활용

정답풀이 :

각 급수를 계산하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= 2a, \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= b \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{3}{2}b. \end{aligned}$$

따라서 조건 (가)는

$$2a - \frac{3}{2}b = 5 \Rightarrow 4a - 3b = 10. \quad (1)$$

또한

$$a_n b_n = ab \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n &= ab \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \\ &= \frac{6}{5}ab = 900. \end{aligned}$$

따라서

$$ab = 750. \quad (2)$$

(1)에서

$$b = \frac{4a - 10}{3}$$

이고,

이를 (2)에 대입하면

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{4a - 10}{3} &= 750 \\ \Rightarrow 4a^2 - 10a - 2250 &= 0 \end{aligned}$$

양의 정수해는 $a = 25$ 이고, 이때 $b = 30$

따라서

$$a + b = 25 + 30 = 55$$

29 정답 10

핵심 등비급수의 수렴과 활용

정답풀이 :

공비를 각각 r, s 라 하고 첫째항을 각각 a_1, b_1 이라 하자.

두 급수가 수렴하므로 $|r| < 1, |s| < 1$

(가)에서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{a_1}{1-r}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_{2n-1}}{3} \right| &= \frac{|a_1|}{3(1-r^2)}. \end{aligned}$$

좌변이 우변과 같고 $1-r > 0$ 이므로 $a_1 > 0$

따라서

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-r} &= \frac{1}{3(1-r^2)} \\ \Rightarrow 3(1-r)(1+r) &= 1-r. \end{aligned}$$

$r \neq 1$ 이므로 $3(1+r) = 1$,

즉

$$r = -\frac{2}{3}.$$

(나)에서 우변이 양수이므로 $b_1 > 0$

또한

$$\begin{aligned} \sum |a_n b_n| &= \frac{a_1 b_1}{1-|rs|}, \\ \left(\sum a_n\right) \left(\sum b_n\right) &= \frac{a_1 b_1}{(1-r)(1-s)}. \end{aligned}$$

따라서

$$(1-r)(1-s) = 1 - |rs|.$$

$r = -2/3$ 을 대입한다.

만약 $s < 0$ 이면 $\frac{5}{3}(1-s) = 1 + \frac{2}{3}s$ 가 되어 $s = 2/7 > 0$ 과 모순이다.

따라서 $s > 0$ 이고

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}(1-s) &= 1 - \frac{2}{3}s \Rightarrow 5 - 5s \\ &= 3 - 2s \Rightarrow s = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

이제

$$\begin{aligned} \sum a_n &= \frac{a_1}{1+2/3} = \frac{3a_1}{5}, \\ \sum b_n &= \frac{b_1}{1-2/3} = 3b_1. \end{aligned}$$

(라)에 의해

$$\frac{3a_1}{5} - 3b_1 = \frac{47}{10}. \quad (1)$$

또 (다)에 의해

$$\begin{aligned} \sum a_n b_n &= \frac{a_1 b_1}{1 - rs} \\ &= \frac{a_1 b_1}{1 + 4/9} = \frac{9a_1 b_1}{13} = 3, \end{aligned}$$

즉

$$a_1 b_1 = \frac{13}{3}. \quad (2)$$

(1), (2)를 연립하면 $a_1 = 10, b_1 = 13/30$ 실제로

$$\begin{aligned} \frac{3 \cdot 10}{5} - 3 \cdot \frac{13}{30} &= 6 - \frac{13}{10} = \frac{47}{10}, \\ 10 \cdot \frac{13}{30} &= \frac{13}{3}. \end{aligned}$$

따라서 구하는 값은

$$a_1 = 10$$

자연수 a 에 대하여 경우를 나누면 다음과 같다.

• $1 \leq a < 6$: $(-\infty, 0)$ 에서 한 해, $(2, 3)$ 에서 한 해가 있어 추가 접점이 2개이다.

전체 접점은 $k = 0$ 까지 합쳐 3개이다.

• $a = 6$: $F(0) = 6$ 이지만 $k = 0$ 은 이미 항상 존재하는 접점이다.

$k \neq 0$ 에서는 $(2, 3)$ 에서만 한 해가 있으므로 전체 접점은 정확히 2개이다.

• $6 < a < 2e^2$: $(0, 2)$ 와 $(2, 3)$ 에서 각각 한 해가 있어 전체 접점은 3개이다.

• $a > 2e^2$: 추가 접점이 없어 전체 접점은 1개이다.

$2e^2 \approx 14.78$ 이므로 자연수 조건에서 정확히 2개의 접점을 갖게 하는 값은

$$a = 6$$

30 정답 6

핵심 여러 가지 미분법

정답풀이:

접점의 매개변수를 k 라 하자. 곡선 위의 점은

$$(x_k, y_k) = (k^3 + 6e^k, k^3 - 6e^k)$$

이고, 접선의 기울기는

$$\begin{aligned} m &= \left. \frac{dy/dt}{dx/dt} \right|_{t=k} \\ &= \frac{3k^2 - 6e^k}{3k^2 + 6e^k}. \end{aligned}$$

점 $(a, -a)$ 가 이 접선 위에 있으려면

$$-a - (k^3 - 6e^k) = m\{a - (k^3 + 6e^k)\}$$

가 성립한다.

정리하면

$$k^2\{a - 2e^k(3 - k)\} = 0$$

따라서 $k = 0$ 은 모든 자연수 a 에 대해 항상 접점이 된다.

$k \neq 0$ 인 추가 접점은

$$F(k) = 2e^k(3 - k) = a$$

의 해와 일치한다.

$F'(k) = 2e^k(2 - k)$ 이므로 F 는 $(-\infty, 2)$ 에서 증가하고 $(2, \infty)$

에서 감소한다.

또한

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow -\infty} F(k) &= 0^+, \quad F(0) = 6, \\ F(2) &= 2e^2, \quad F(3) = 0 \end{aligned}$$

23 정답 ㉓ 11

핵심 조건부확률

정답풀이 :

12번의 시행 결과는 모두 $2^{12} = 4096$ 가지로 같다.
 i 번 시행 후 점의 좌표가 x 이고, 지금까지 시행 후 좌표가 음수가 아니었던 횟수가 r 인 경우의 수를 $N_i(x, r)$ 라 하자.
 초기값은 $N_0(0, 0) = 1$ 다음 시행에서

$$x \mapsto x + 1 \quad \text{또는} \quad x \mapsto x - 2$$

가 되고, 새 좌표가 0 이상이면 r 이 1 증가한다.

이 점화식으로 12단계까지 계산하면 $r = 6$ 인 경우의 수는 최종 좌표별로 다음과 같다.

최종 좌표 x	-12	-9	-6	-3	0	3
$N_{12}(x, 6)$	3	19	48	62	37	7

따라서 경우의 수는

$$3 + 19 + 48 + 62 + 37 + 7 = 176$$

이고,

$$p = \frac{176}{4096} = \frac{11}{256}$$

그러므로

$$256p = 11$$

24 정답 ㉓ 144

핵심 순열과 조합

정답풀이 :

먼저 1과 2가 이웃하는 경우를 센다. 1, 2를 하나의 블록으로 보면, 이 블록과 나머지 5개의 공, 총 6개의 대상을 원형으로 배열하면 된다. 블록 내부의 순서는 2가지이므로

$$2 \cdot (6 - 1)! = 2 \cdot 120 = 240$$

이 중 3과 4도 이웃하는 경우를 뺀다. 1, 2를 하나의 블록으로, 3, 4를 하나의 블록으로 보면 두 블록과 나머지 3개의 공, 총 5개의 대상을 원형으로 배열하는 경우이다.

두 블록의 내부 순서는 각각 2가지이므로

$$2 \cdot 2 \cdot (5 - 1)! = 4 \cdot 24 = 96$$

따라서 조건을 만족하는 배열의 수는

$$240 - 96 = 144$$

25 정답 ㉓ 55

핵심 이항분포

정답풀이 :

먼저 조건 (가)를 만족시키는 함수의 개수를 센다.

$$f(1) + f(2) = 4 \text{가 되려면}$$

$$(f(1), f(2)) = (1, 3), (2, 2), (3, 1)$$

의 3가지가 가능하다. $f(3), f(4)$ 는 각각 4가지씩 가능하므로 전체 함수의 개수는

$$3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$$

이 중 $f(3) = f(4)$ 인 경우는 $f(3) = f(4) = 1, 2, 3, 4$ 의 4가지에 대해 가능하므로

$$3 \cdot 4 = 12$$

가지이다.

따라서 한 번의 시행에서 사건 B 가 일어날 확률은

$$p = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

그러므로 $X \sim B(n, \frac{1}{4})$

$$P(X = 1) = np(1 - p)^{n-1},$$

$$P(X = 2) = \binom{n}{2} p^2 (1 - p)^{n-2}$$

두 값이 같고 $n \geq 2$ 이므로

$$n(1 - p) = \binom{n}{2} p \Rightarrow 1 - p = \frac{n-1}{2} p$$

$p = \frac{1}{4}$ 를 대입하면

$$\frac{3}{4} = \frac{n-1}{8} \Rightarrow n = 7$$

따라서 구하는 값은

$$48 + 7 = 55$$

26 정답 ㉓ $\frac{7}{10}$

핵심 조건부확률

정답풀이 :

조건부 표본공간: 흰 2개·검 2개를 뽑고 네 수의 합이 짝수.

흰 2개의 합 짝수: $\{1, 3\}, \{2, 4\}$ (2가지) 흰 2개의 합 홀수: 4가지.

검도 동일.

네 수의 합 짝수 \Leftrightarrow 흰합·검합 같은 패리티.

- 둘 다 짝수: $2 \times 2 = 4$
- 둘 다 홀수: $4 \times 4 = 16$

총 표본 크기 = 20

여사건(흰 2와 검 2의 숫자가 모두 다름):

- 둘 다 짝수: 흰 $\{1, 3\}$ ↔검 $\{2, 4\}$ 또는 그 반대 = 2가지.

• 둘 다 홀수: 흰의 보집합이 자동 검 → 흰 4가지에 검 1가지씩 = 4가지.

여사건 총 6.

따라서 구하는 확률

$$= 1 - \frac{6}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

27 정답 ① 16

핵심 순열과 조합

정답풀이 :

회전에 의한 중복을 없애기 위해 1이 적힌 공의 위치를 고정한다.

2가 적힌 공은 1의 맞은편에 놓여야 하므로 위치가 하나로 정해진다.

남은 네 자리에는 3, 4, 5, 6을 배열하므로 전체 경우의 수는

$$4! = 24$$

이 중 3과 4가 이웃하는 경우를 뺀다. 1과 2가 고정된 뒤 남은 네 자리에서 서로 이웃한 자리쌍은 두 쌍이다. 3과 4가 들어갈 이웃한 자리쌍을 고르는 방법이 2가지, 3과 4의 순서가 2가지, 남은 5와 6의 순서가 2가지이므로

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

따라서 조건을 만족하는 배열 수는

$$24 - 8 = 16$$

28 정답 ③ 63

핵심 이항분포

정답풀이 :

이항분포에서 $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{E}{V} &= \frac{1}{1-p} = \frac{7}{6} \\ \Rightarrow 1-p &= \frac{6}{7}, \\ p &= \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

(가):

$$\begin{aligned} (1-p)^n &= \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} \\ \Rightarrow (1-p)^2 &= \binom{n}{2} p^2 \\ \Rightarrow \frac{36}{49} &= \frac{n(n-1)/2}{49}. \end{aligned}$$

따라서 $\binom{n}{2} = 36$, $n(n-1) = 72$, $n = 9$.

$$E(X) = \frac{9}{7}, V(X) = \frac{54}{49}.$$

$$7E + 49V = 9 + 54 = 63$$

29 정답 21

핵심 이항분포

정답풀이 :

$X \sim B(n, p)$ 라 하자.

조건 $E(X) : V(X) = 6 : 5$ 에서

$$\frac{E(X)}{V(X)} = \frac{np}{np(1-p)} = \frac{1}{1-p} = \frac{6}{5}$$

이므로 $p = \frac{1}{6}$

또

$$P(X = 1) = P(X = 2)$$

이므로

$$n(1-p)^{n-1}p = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$$

$n \geq 2$, $0 < p < 1$ 이므로 양변을 정리하면

$$1-p = \frac{n-1}{2} p$$

$p = \frac{1}{6}$ 을 대입하여

$$\frac{5}{6} = \frac{n-1}{12}$$

이므로 $n = 11$

이제 한 번의 시행에서 사건 A 가 일어날 확률을 m 으로 나타낸다.

세 수 중 한 수가 나머지 두 수의 합과 같으려면 서로 다른 자연수

$a < b < c$ 에 대해 $c = a + b \leq m$ 이어야 한다.

a 를 고정하면

$$b = a + 1, a + 2, \dots, m - a$$

이므로 가능한 b 의 개수는 $m - 2a$ 이고,

$$a \leq \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$$

따라서 사건 A 가 일어나는 경우의 수는

$$\sum_{a=1}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} (m - 2a)$$

이다.

m 이 짝수이면 이 값은 $\frac{m(m-2)}{4}$ 이고, 전체 경우의 수 $\binom{m}{3}$ 에

대한 확률이 $\frac{1}{6}$ 이므로

$$\frac{m(m-2)/4}{m(m-1)(m-2)/6} = \frac{1}{6}$$

이를 풀면 $m = 10$

m 이 홀수이면 사건 A 의 경우의 수는 $\frac{(m-1)^2}{4}$ 이므로

$$\frac{(m-1)^2/4}{m(m-1)(m-2)/6} = \frac{1}{6}$$

정리하면

$$m^2 - 11m + 9 = 0$$

인데 자연수해가 없다.

따라서 $m = 10$ 만 가능하다.

그러므로

$$m + n = 10 + 11 = 21$$

30 정답 16

핵심 순열과 조합

정답풀이 :

숫자 **1, 2, 4, 8**을 각각 $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ 으로 본다.

전체 곱이 $64 = 2^6$ 이고, 홀수 번째 자리 세 수의 곱과 짝수 번째 자리 세 수의 곱이 같으므로 홀수 번째 자리의 지수합과 짝수 번째 자리의 지수합은 각각 **3**

세 자리의 지수합이 3이 되는 비순서 유형은 다음 세 가지뿐이다.

$$A = (0, 0, 3), \quad B = (0, 1, 2), \quad C = (1, 1, 1)$$

즉 값으로 쓰면 $A = \{1, 1, 8\}, B = \{1, 2, 4\}, C = \{2, 2, 2\}$

홀수 번째 자리 유형과 짝수 번째 자리 유형을 각각 A, B, C 중 하나로 정하고, 각 유형의 서로 다른 순열을 홀수 자리와 짝수 자리에 배치한 뒤 이웃한 두 수가 같은 경우를 제외한다.

가능한 경우의 수는 다음과 같다.

	A	B	C
A	0	2	3
B	2	6	0
C	3	0	0

예를 들어 (A, B) 의 경우 홀수 자리에는 $(1, 1, 8)$, 짝수 자리에는 $(1, 2, 4)$ 가 들어가며, 이웃한 같은 수가 없도록 하는 배열은 2가지이다.

(B, B) 의 경우 두 쪽 모두 $(1, 2, 4)$ 의 순열이고, 조건을 만족하는 배치는 6가지이다.

따라서 전체 개수는

$$0 + 2 + 3 + 2 + 6 + 0 + 3 + 0 + 0 = 16$$

