

뉴런연구소

LEVEL-K 정답 및 해설

도함수의 활용

정답 확인과 풀이 검토를 위한 해설집입니다.

※ 문제 풀이 후 해설을 확인하세요.

01 정답 ④

핵심 속도와 가속도

정답풀이 :

두 점의 위치 차를

$$h(t) = x_1(t) - x_2(t) = t^3 - 10t^2 + (20 - k)t = t\{t^2 - 10t + 20 - k\}$$

라 하자.

출발 후 $t > 0$ 에서 만나는 시각은 이차방정식

$$t^2 - 10t + 20 - k = 0$$

의 양의 근

만나는 순간 두 점의 속도가 같으려면 그 시각에서 $h'(t) = 0$ 도 성립해야 한다.

따라서 위 이차방정식은 중근을 가져야 하므로

$$t^2 - 10t + 20 - k = (t - 5)^2$$

그러므로 만나는 시각은 $t = 5$ 이고, $20 - k = 25$ 에서 $k = -5$ 가속도는

$$a_1(t) = 6t - 12, \quad a_2(t) = 8$$

$t = 5$ 에서

$$a_1(5) = 18, \quad a_2(5) = 8$$

이므로 가속도의 곱은

$$18 \cdot 8 = 144$$

02 정답 ①

핵심 함수의 미분가능성

정답풀이 :

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16 = 4(x + 1)(x - 2)^2$$

따라서 $x = -1$ 에서 극소를 갖고, $x = 2$ 에서는 도함수가 0이지만 부호가 바뀌지 않는다.

$g(x) = |f(x)|$ 는 $f(x) = 0$ 이면서 f 의 부호가 바뀌는 점에서만 미분가능하지 않다.

(i) $x = 2$ 에서 $f(2) = 0$ 이 되는 경우

$$16 - 32 + 32 + a = 0$$

에서 $a = -16$ 이때

$$f(x) = (x - 2)^3(x + 2)$$

이므로 $x = 2$ 는 삼중근(부호는 바뀌지만 $f'(2) = 0$ 이므로 $|f|$ 가 미분가능)이고, 단순근 $x = -2$ 에서만 미분가능하지 않다.

따라서 조건을 만족한다.

(ii) $x = -1$ 에서 $f(-1) = 0$ 이 되는 경우 $a = 11$ 이때 $x = -1$ 이 극소이면서 함숫값이 0이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 된다.

즉 $g(x) = f(x)$ 가 되어 미분가능하지 않은 점이 존재하지 않으므로 조건에 맞지 않는다.

따라서 조건을 만족하는 값은

$$a = -16$$

03 정답 ③

핵심 함수의 최댓값과 최솟값

정답풀이 :

$f'(x) = 6x^2 - 24 = 6(x - 2)(x + 2)$ 이므로 구간 $[-3, 4]$ 에서 확인할 점은 $-3, -2, 2, 4$

각 함숫값은

$$f(-3) = 33, \quad f(-2) = 47 \\ f(2) = -17, \quad f(4) = 47$$

따라서 구간에서 $f(x)$ 의 최댓값은 47, 최솟값은 -17

$M(t)$ 는 $f(x)$ 의 값들이 모두 들어 있는 구간 $[-17, 47]$ 에서 t 까지의 거리 중 최댓값이므로

$$M(t) = \max(|47 - t|, |-17 - t|)$$

이 값이 최소가 되려면 t 가 두 끝값의 가운데에 있어야 하므로

$$47 - t = t + 17$$

에서 $t = 15$ 이때

$$M(15) = 32$$

04 정답 ③

핵심 접선의 방정식과 넓이의 최댓값

정답풀이 :

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$ 라 하면 $f'(x) = -3x^2 + 6x - 2$ 점 $A(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = -2$ 이므로 접선 l 은

$$y = -2x$$

곡선과 직선 l 의 다른 교점을 구하면

$$-x^3 + 3x^2 - 2x = -2x$$

이므로

$$x^2(x - 3) = 0$$

따라서 $B = (3, -6)$ 이고, $AB = 3\sqrt{5}$

점 $P(x, f(x))$ 에서 직선 $2x + y = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|2x + f(x)|}{\sqrt{5}} = \frac{|-x^3 + 3x^2|}{\sqrt{5}}$$

$g(x) = -x^3 + 3x^2$ 이라 하면

$$g'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$$

이고, $0 < x < 2$ 에서 $g'(x) > 0$, $2 < x < 3$ 에서 $g'(x) < 0$

이므로 g 는 $x = 2$ 에서 최댓값을 갖는다.

그 값은

$$g(2) = -8 + 12 = 4$$

따라서 삼각형 PAB 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = 6$$

05 정답 486

핵심 접선의 방정식과 최적화

정답풀이 :

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 12x$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 18x + 12$
원점에서 접선 l 의 기울기는 $f'(0) = 12$ 이므로

$$l : y = 12x$$

곡선과 직선 l 의 다른 교점은

$$x^3 - 9x^2 + 12x = 12x$$

에서 $x^2(x - 9) = 0$ 이므로 $A = (9, 108)$

점 P 에서 삼각형 OAP 의 넓이가 최대가 되려면, 직선 l 과 곡선 사이의 거리가 최대가 되어야 한다.

두 그래프의 차는

$$12x - f(x) = -x^3 + 9x^2$$

이고, 이 함수는

$$-3x^2 + 18x = -3x(x - 6)$$

에 의해 $0 < x < 9$ 에서 $x = 6$ 일 때 최대가 된다.

$x = 6$ 에서 $f(6) = -36$ 이므로 $P = (6, -36)$ 점 P 에서 직선 $12x - y = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|72 + 36|}{\sqrt{145}} = \frac{108}{\sqrt{145}}$$

이고, $OA = 9\sqrt{145}$

따라서 최대 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 9\sqrt{145} \cdot \frac{108}{\sqrt{145}} = 486$$

06 정답 27

핵심 부등식에의 활용

정답풀이 :

$h(x) = f(x) - g(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5 - a$ 라 두면,
주어진 조건은

$$|3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5 - a| \leq 45$$

가 모든 $x \in [-3, 2]$ 에서 성립한다는 뜻

$u(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5$ 라 하면

$$u'(x) = 12x(x + 2)(x - 1)$$

구간의 양 끝점과 임계점에서의 값은

$$u(-3) = 32, u(-2) = -27, u(0) = 5, u(1) = 0, u(2) = 37$$

따라서 $u(x)$ 의 최솟값은 -27 , 최댓값은 37 모든 x 에 대해

$|u(x) - a| \leq 45$ 가 성립하려면

$$37 - a \leq 45, \quad -27 - a \geq -45$$

이어야 한다.

즉

$$-8 \leq a \leq 18$$

이 범위의 정수 a 는 27개

07 정답 150

핵심 함수의 미분가능성과 교점의 개수

정답풀이 :

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x + 1)(x - 2)$$

따라서 $f(x)$ 는 $x = -1$ 과 $x = 2$ 에서 극소, $x = 0$ 에서 극대를 갖는다.

각 극값은

$$f(-1) = 35, \quad f(0) = 40, \quad f(2) = 8$$

함수 $g(x) = |f(x) - k|$ 는 $f(x) = k$ 이면서 $f(x) - k$ 의 부호가 바뀌는 점, 수평선 $y = k$ 가 곡선 $y = f(x)$ 와 접하지 않고 가로지르는 점에서만 미분가능하지 않다.

수평선 $y = k$ 가 곡선과 네 점에서 가로지르려면 높은 극솟값과 극댓값 사이에 있어야 하므로

$$35 < k < 40$$

이 범위의 정수는 36, 37, 38, 39이고, 그 합은

$$36 + 37 + 38 + 39 = 150$$

08 정답 167

핵심 함수의 극대와 극소

정답풀이 :

조건 (가)에 $x = 0$ 을 대입하면

$$2f(2) = 10$$

이므로 $f(2) = 5$ 따라서

$$8 - 24 + 2p + q = 5$$

에서

$$2p + q = 21$$

또

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + p = 3(x - 2)^2 + p - 12$$

두 극점의 x 좌표를 $2 - k, 2 + k (k > 0)$ 라 하면

$$3k^2 = 12 - p$$

이므로 극대점과 극소점의 x 좌표의 차는

$$L = (2 + k) - (2 - k) = 2k$$

도함수 $f'(x) = 3\{x - (2 - k)\}\{x - (2 + k)\}$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 극댓값과 극솟값의 차 D 와 같으므로, 1/6 공식에 의해

$$D = \frac{3}{6} \{(2 + k) - (2 - k)\}^3 \\ = \frac{(2k)^3}{2} = 4k^3$$

조건 (나)에 의해

$$DL = 4k^3 \cdot 2k = 8k^4 = 72$$

이므로 $k^4 = 9$ 즉 $k^2 = 3$ 따라서

$$12 - p = 3k^2 = 9$$

에서 $p = 3$ 이고, $2p + q = 21$ 에서 $q = 15$

그러므로

$$f(8) = 512 - 384 + 24 + 15 = 167$$

